دالّة مثلّثية – شتاء 2026

.7 معطاة الدالّة $f(x)=(\sin x)^2+\cos x-1$ ، المعرَّفة في المجال $-\pi \le x \le \pi$.

أ. برهنوا أنّ الدالّة $f(x)$ هي زوجيّة.

ب. (1) جدوا إحداثيّات نقاط تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور x .

(2) جدوا إحداثيّات جميع النقاط القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدِّدوا نوع هذه النقاط.

جـ. ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $f(x)$.

معطاة الدالّة $g(x)=\frac{1}{f(x)+b}$ ، b هو بارامتر.

معطى أنّه يوجد للدالّة $g(x)$ خطّا تقارب عموديّان بالضبط.

د. اكتبوا قيمتَيْن ممكنتَيْن لِـ b ، إحداهما موجبة والأخرى سالبة.

عوِّضوا في الدالّة $g(x)$ القيمة السالبة لِـ b التي وجدتموها، وأجيبوا عن البندين "هـ – و" .

هـ. (1) جدوا مجال تعريف الدالّة $g(x)$.

(2) جدوا إحداثيّات جميع النقاط القصوى للدالّة $g(x)$ ، وحدِّدوا نوع هذه النقاط.

و. ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدالّة $g(x)$.

أ. برهان أنّ الدّالّة زوجيّة

$$f(x)=(sinx)^2+cosx-1$$

$$f(-x)=(\sin(-x))^2+\cos(-x)-1=(sinx)^2+cosx-1$$

$$f(x)=f(-x)$$

$\Rightarrow$ الدّالّة زوجيّة

ب. (1) إيجاد تقاطع الدّالّة $f(x)$ مع المحور x

$$f(x)=0$$

$$(sinx)^2+cosx-1=0$$

$$1-(cosx)^2+cosx-1=0$$

$$-(cosx)^2+cosx=0$$

$$-cosx(cosx-1)=0$$

$$cosx = 0 \text{ أو } cosx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \text{أو} \quad x = 2\pi k$$

حسب مجال التّعريف المعطى:

$$x = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \ (0,0) \ \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

(2) إيجاد جميع إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $f(x)$ وتحديد نوعها

$$f(x) = (sinx)^2 + cosx - 1$$
$$f'(x) = 2sinx \cdot cosx - sinx$$
$$f'(x) = \sin(2x) - sinx$$
$$f'(x) = 0$$
$$sin(2x) - sinx = 0$$
$$sin(2x) = sinx$$
$$2x = \pi - x + 2\pi k \quad \text{أو} \quad 2x = x + 2\pi k$$
$$x = \frac{\pi + 2\pi k}{3} \text{ أو } x = 2\pi k$$

$$f(\pi) = f(-\pi) = -2$$
$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$
$$f(0) = 0$$

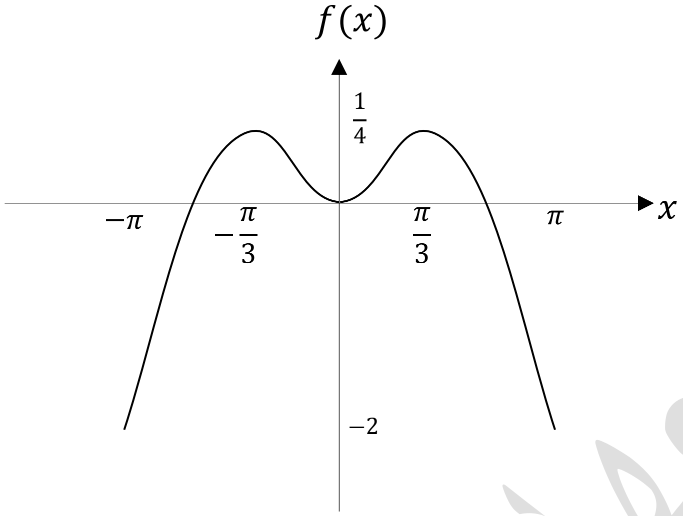
حسب مجال التّعريف المعطى:

$$x = -\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi$$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π
	min ↗	max ↘	min ↗	max ↘	min

$$(-\pi, -2)min, \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) max, (0,0)min, \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) max, (\pi, -2)min$$

جـ. رسم بيانيّ تقريبيّ للدّالّة $f(x)$



د. كتابة قيمتيْن ممكنتين لـ b، إحداهما موجبة والأخرى سالبة

$$g(x)=\frac{1}{f(x)+b}$$

معطى أنّ للدّالّة $g(x)$ خطّا تقارب عموديّان بالضّبط

نجد مجال تعريف الدّالّة $g(x)$:

$$f(x)+b\neq 0$$

$$f(x)\neq -b$$

بما أنّه معطى أنّ للدّالّة $g(x)$ خطّا تقارب عموديّان بالضّبط، لذا فإنّ لها قيمتا x غير معرّفتان بالضّبط

حسب الرّسم، نجد متى يكون للدّالّة $f(x)$ قيمتان بالضبط لنفس الـ x:

$-2\le -b<0$ أو $-b=\frac{1}{4}$

$0<b\le 2$ أو $b=-\frac{1}{4}$

هـ. (1) إيجاد مجال تعريف الدّالّة $g(x)$

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - \frac{1}{4}}$$

$$f(x) \neq \frac{1}{4}$$

$$x \neq \pm\frac{\pi}{3}$$

(2) إيجاد جميع إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $g(x)$ وتحديد نوعها

الدّالّة $g(x)$ هي عبارة عن إزاحة عمودية للأسفل للدّالة $f(x)$ بِـ $\frac{1}{4}$ خطوات وثمّ مقلوب هذه الدّالة

لذا، النقاط القصوى للدّالّة $g(x)$ هي:

$$\left(-\pi, -\frac{4}{9}\right) max, (0, -4) max, \left(\pi, -\frac{4}{9}\right) max$$

$x = \pm\frac{\pi}{3}$ خارج مجال تعريف الدّالّة $g(x)$

نقاط الـ min ستصبح نقاط max

و. رسم بيانيّ للدّالّة $g(x)$