امتحان 1 - دالّة جذريّة

1) معطاة الدّالّة: $f(x) = x^2 - 4\sqrt{x}$.

أ. بالنسبة للدّالّة $f(x)$، جدوا:

(1) مجال التّعريف.

(2) إحداثيّات نقاط التّقاطع مع المحورين.

(3) إحداثيّات النّقاط القصوى، وحدّدوا نوعها.

(4) مجالات التّصاعد والتّنازل.

ب. ارسموا رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة $f(x)$.

ج. هل الدّالّة $f(x)$ زوجيّة، فرديّة، أم ليست زوجيّة وليست فرديّة؟ علّلوا.

د. معطاة الدّالّة: $h(x) = x^2 - 4\sqrt{x} + k$.

(1) جدوا قيمة ممكنة لـ k والتي بالنّسبة لها الرّسم البيانيّ للدّالّة $h(x)$ لا يقطع المحور x .

(2) بالنسبة لقيمة k التي وجدتموها في الفرع السّابق، جدوا إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $h(x)$.

أ. (1) نجد مجال تعريف الدّالّة $f(x)$

$$f(x) = x^2 - 4\sqrt{x}$$

$$x \geq 0$$

(2) نجد إحداثيّات نقاط التّقاطع مع المحورين

مع المحور x:

$$f(x) = 0$$

$$x^2 - 4\sqrt{x} = 0$$

$$x^2 = 4\sqrt{x} \quad (\,)^2$$

$$x^4 = 16x$$

$$x^4 - 16x = 0$$

$$x \cdot (x^3 - 16) = 0$$

$$x = 0 \qquad x^3 = 16 \quad \sqrt[3]{\;}$$

$$x = 2.52$$

مع المحور y:

$$f(0) = 0^2 - 4\sqrt{0} = 0$$

نقاط التّقاطع مع المحورين:

$$(0,0), (2.52,0)$$

(3) نجد إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $f(x)$ ونحدّد نوعها

$$f(x) = x^2 - 4\sqrt{x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$2x - \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = 2x \quad / \cdot \sqrt{x}$$

$$2 = 2x\sqrt{x} \quad /()^2$$

$$4 = 4x^2 \cdot x$$

$$4x^3 = 4 \quad /:4$$

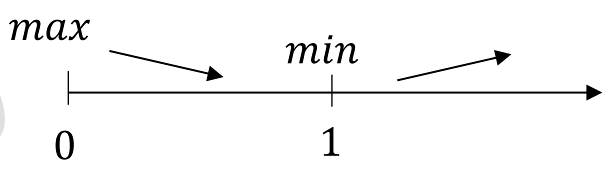
$$x^3 = 1$$

$$x = 1 \quad /\sqrt[3]{\ }$$

نجد إحداثيّ الـ y للنّقطة القصوى:

$$f(1) = 1^2 - 4\sqrt{1} = -3$$

نحدّد نوع النّقاط القصوى:

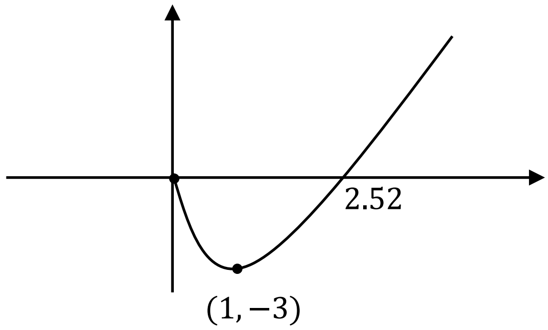


$min\ (1,-3)\ ,\ max$ طرف $(0,0)$

(4) نجد مجالات التّصاعد والتّنازل

مجال التّصاعد: $x > 1$ مجال التّنازل: $0 < x < 1$

ب. نرسم رسمًا بيانيًّا تقريبيًّا للدّالّة $f(x)$



ج. نحدّد هل الدّالّة $f(x)$ زوجيّة، فرديّة، أم ليست زوجيّة وليست فرديّة

بناءً على الرّسم في البند السابق، نقول أنّ الدّالّة ليست زوجيّة لأنها ليست متماثلة بالنّسبة للمحور y.

الدّالّة أيضًا ليست فرديّة لأنها ليست متماثلة حول نقطة أصل المحاور، أي لكي تكون الدّالّة فرديّة، يجب أن نرى فرعًا متماثلًا للدّالّة في الرّبع الثاني.

لذلك: الدّالّة ليست زوجيّة وليست فرديّة

د. (1) نجد قيمة k التي بالنّسبة لها الرّسم البياني للدالة $h(x)$ لا يقطع محور x

معطى أنّ: $h(x) = x^2 - 4\sqrt{x} + k$

نرى أنّ الدّالّة $h(x)$ هي إزاحة عمودية للدّالّة $f(x)$ بمقدار k خطوات.

لكيلا يقطع الرّسم البيانيّ محور x أبدًا، يجب أن تكون أصغر قيمة للدّالّة أكبر من صفر، أي أنّه علينا إزاحة الدّالّة للأعلى بمقدار أكثر من 3 خطوات.

لذلك: $k > 3$

لذلك: مثلًا $k = 4$

(2) نجد إحداثيّات النّقاط القصوى للدّالّة $h(x)$ بالنّسبة لـ $k = 4$

نقوم بزيادة 4 لإحداثيّات الـ y للنّقاط القصوى للدّالّة $f(x)$

إحداثيّات الـ x لا تتغيّر.

لذلك النّقاط القصوى الجديدة هي:

$max\ (0,4)\ ,\ min(1,1)$