

دالة مثلثية - شتاء 2026

7. معطاة الدالة $f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$ ، المعرفة في المجال $-\pi \leq x \leq \pi$.
- أ. برهنوا أن الدالة $f(x)$ هي زوجية .
- ب. (1) جدوا إحداثيات نقاط تقاطع الرسم البياني للدالة $f(x)$ مع المحور x .
 (2) جدوا إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة $f(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط .
 ج. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $f(x)$.
- معطاة الدالة $g(x) = \frac{1}{f(x) + b}$ ، b هو پارامتر .
- معطى أنه يوجد للدالة $g(x)$ خطاً تقارب عموديان بالضبط .
- د. اكتبوا قيمتين ممكنتين لـ b ، إحداها موجبة والأخرى سالبة .
- عوضوا في الدالة $g(x)$ القيمة السالبة لـ b التي وجدتموها ، وأجيبوا عن البندين "هـ-و" .
- هـ. (1) جدوا مجال تعريف الدالة $g(x)$.
 (2) جدوا إحداثيات جميع النقاط القصوى للدالة $g(x)$ ، وحددوا نوع هذه النقاط .
 و. ارسموا رسماً بيانياً تقريبياً للدالة $g(x)$.

أ. برهان أن الدالة زوجية

$$f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$$

$$f(-x) = (\sin(-x))^2 + \cos(-x) - 1 = (\sin x)^2 + \cos x - 1$$

$$f(x) = f(-x)$$

⇒ الدالة زوجية

ب. (1) إيجاد تقاطع الدالة $f(x)$ مع المحور x

$$f(x) = 0$$

$$(\sin x)^2 + \cos x - 1 = 0$$

$$1 - (\cos x)^2 + \cos x - 1 = 0$$

$$-(\cos x)^2 + \cos x = 0$$

$$-\cos x(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ أو } \cos x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ أو } x = 2\pi k$$

حسب مجال التعريف المعطى:

$$x = -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) (0,0) \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

(2) إيجاد جميع إحداثيات النقاط القصوى للدالة $f(x)$ وتحديد نوعها

$$f(x) = (\sin x)^2 + \cos x - 1$$

$$f'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - \sin x$$

$$f'(x) = \sin(2x) - \sin x$$

$$f'(x) = 0$$

$$\sin(2x) - \sin x = 0$$

$$\sin(2x) = \sin x$$

$$2x = \pi - x + 2\pi k \text{ أو } 2x = x + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi + 2\pi k}{3} \text{ أو } x = 2\pi k$$

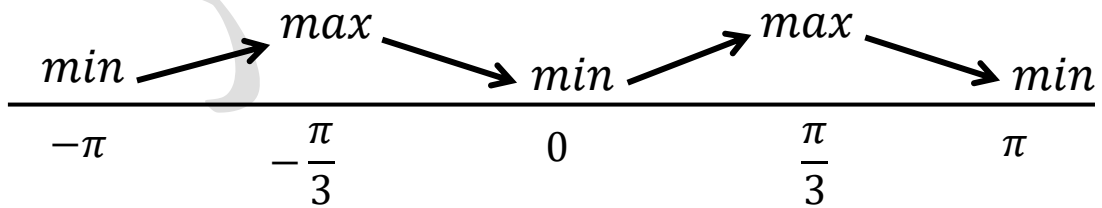
حسب مجال التعريف المعطى:

$$f(\pi) = f(-\pi) = -2$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 0$$

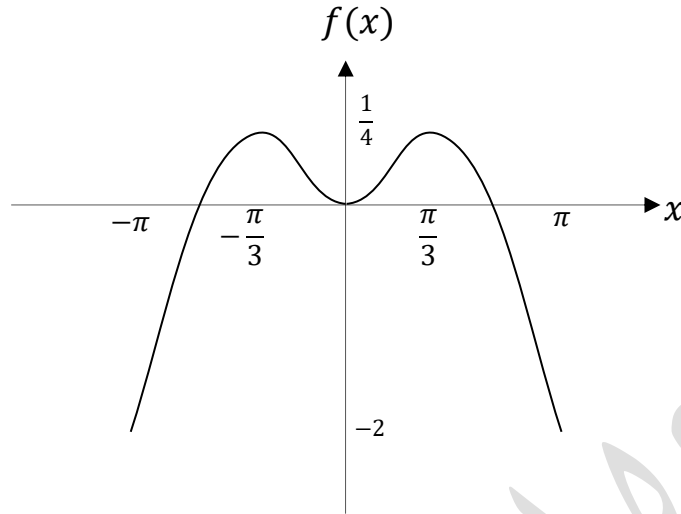
$$x = -\pi, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi$$



$$(-\pi, -2) \min, \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) \max, (0, 0) \min, \left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right) \max, (\pi, -2) \min$$

رسم بياني تقريبي للدالة $f(x)$

ج.



كتابة قيمتين ممكنتين لـ b ، إحداها موجبة والأخرى سالبة

د.

$$g(x) = \frac{1}{f(x) + b}$$

معطى أن للدالة $g(x)$ خطًا تقارب عموديان بالضبط

نجد مجال تعريف الدالة $g(x)$:

$$f(x) + b \neq 0$$

$$f(x) \neq -b$$

بما أنه معطى أن للدالة $g(x)$ خطًا تقارب عموديان بالضبط، لذا فإن لها قيمتا x غير معرفتان بالضبط

حسب الرسم، نجد متى يكون للدالة $f(x)$ قيمتان بالضبط لنفس الـ x :

$$-2 \leq -b < 0 \text{ أو } -b = \frac{1}{4}$$

$$0 < b \leq 2 \text{ أو } b = -\frac{1}{4}$$

إيجاد مجال تعريف الدالة $g(x)$

هـ. (1)

$$g(x) = \frac{1}{f(x) - \frac{1}{4}}$$

$$f(x) \neq \frac{1}{4}$$

$$x \neq \pm \frac{\pi}{3}$$

إيجاد جميع إحداثيات النقاط القصوى للدالة $g(x)$ وتحديد نوعها

(2)

الدالة $g(x)$ هي عبارة عن إزاحة عمودية للأسفل للدالة $f(x)$ بـ $\frac{1}{4}$ خطوات وثم مقلوب هذه الدالة

لذا، النقاط القصوى للدالة $g(x)$ هي:

$$\left(-\pi, -\frac{4}{9}\right) \max, (0, -4) \max, \left(\pi, -\frac{4}{9}\right) \max$$

تعريف الدالة $g(x)$ خارج مجال $x = \pm \frac{\pi}{3}$

نقاط الـ min ستصبح
نقاط الـ max

رسم بياني للدالة $g(x)$

و.

