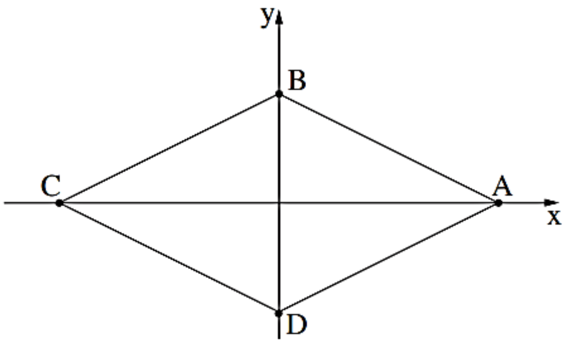
هندسة تحليلية – صيف 2024 موعد ب

1. معطى المعيَّن ABCD . قطرا المعيَّن موضوعان على المحورَيْن،
كما هو موصوف في الرسم الذي أمامكم.
معطى أنّ: طول القطر AC هو 10 .
بُعد كلّ واحد من أضلاع المعيَّن عن نقطة أصل
المحاور هو $\sqrt{5}$.



أ. جدوا معادلة الضلع AB .

داخل المعيَّن محصورة دائرة.

ب. جدوا معادلة الدائرة.

النقطة M هي نقطة تماسّ الدائرة والمعيَّن في الرُّبْع الأوّل.

جـ. جدوا إحداثيّات النقطة M .

يُنزِلون من النقطة M عمودًا على المحور x ، يقطعه في النقطة $K(a, 0)$.
يُشيرون على المستقيم $x = -a$ إلى النقطة E ، ويمرِّرون عبرها مستقيمًا يوازي المحور x .
المستقيم الموازي يقطع العمود المتوسّط للقطعة EK في النقطة G .

د. بيِّنوا أنّ المحلّ الهندسيّ لجميع النقاط G التي تَنتُج بهذه الطريقة موجود على قطع مكافئ، وَجِدوا معادلته.

النقطة N تقع في الرُّبْع الأوّل على القطع المكافئ الذي وجدتم معادلته. الإحداثيّ x للنقطة N هو 16 .

هـ. جدوا معادلتَي الدائرتَيْن اللّتَيْن مركزهما في النقطة N ، وتمسّان الدائرة المحصورة في المعيَّن.

أ. نجد معادلة الضلع AB

$$y = mx + b$$

$$\Downarrow$$

$$mx - y + b = 0$$

$b > 0$

<u>بعد نقطة أصل المحاور عن الضلع AB هي $\sqrt{5}$</u>

$$\Downarrow$$

$$\frac{|mx - y + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{|m \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\frac{b}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$b = \sqrt{5m^2 + 5}$$

$$AC = 10$$

$$\Downarrow$$

$$OA = 5$$

نرمز O لنقطة أصل المحاور

$$\Downarrow$$

$$A(5,0)$$

نعوض النقطة A في معادلة الضلع AB

$$m \cdot 5 - 0 + b = 0$$

$$b = -5m$$

$$\begin{cases} b = -5m \\ b = \sqrt{5m^2+5} \end{cases}$$

$$-5m = \sqrt{5m^2+5}$$

$$25m^2 = 5m^2 + 5$$

$$m^2 = \frac{1}{4}$$

$$m = \pm\frac{1}{2}$$

المستقيم تنازلي ⟵ الميل سالب

$$b = \frac{5}{2} \text{ ، } m = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2}x - y + \frac{5}{2} = 0$$

$$-x - 2y + 5 = 0$$

ب. نجد معادلة الدائرة المحصورة في المعين

مركز الدائرة المحصورة في شكل رباعي هي نقاط التقاء أقطاره

لذلك مركز الدائرة هو $(0,0)$

الضلع AB يمس الدائرة

نصف قطر الدائرة هو بعد نقطة المركز عن نقطة التماس الواقعة على الضلع AB

$$R = \sqrt{5}$$

<u>معادلة الدائرة:</u>

$$x^2 + y^2 = 5$$

ج. نجد إحداثيات النقطة M

النقطة M هي نقطة تماسّ الدائرة والمعيّن في الربع الأول

نفرض $M(x,y)$

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x-2y+5=0 \end{cases}$$

$$x=2y-5$$

$$(2y-5)^2+y^2=5$$

$$4y^2-20y+25+y^2=5$$

$$y^2-4y+4=0$$

$$(y-2)^2=0$$

$$y=2$$

$$\Downarrow$$

$$x=1$$

$$M(1,2)$$

د. نبين أنّ المحل الهندسي لجميع النقاط G التي تنتج بهذه الطريقة موجود على قطع مكافئ

MK هو عامود على المحور x لذلك في $K(a,0)$ ، $a=1$

في المثلث EGK يوجد عامود متوسط لذلك EGK هو مثلث متساوي الساقيين

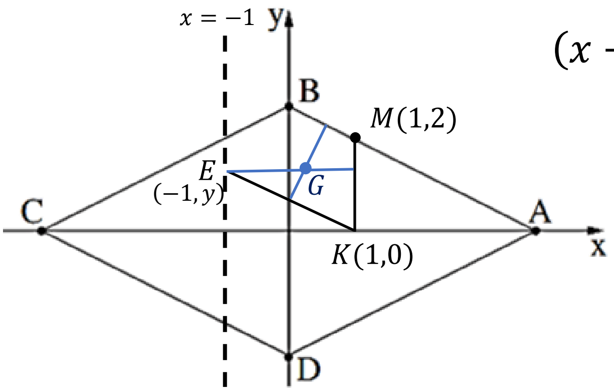
$$EG=GK$$

$$G(x,y)$$

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-y)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$$

$$(x+1)^2=(x-1)^2+y^2$$

$$y^2=4x$$



هـ. نجد معادلتي الدائرتين اللتين مركزهما في النقطة N وتمسان الدائرة المحصورة

معطى أنّ النقطة N تقع في الربع الأول على القطع المكافئ الذي وجدنا معادلته في الفرع السابق، والإحداثي x للنقطة N هو 16

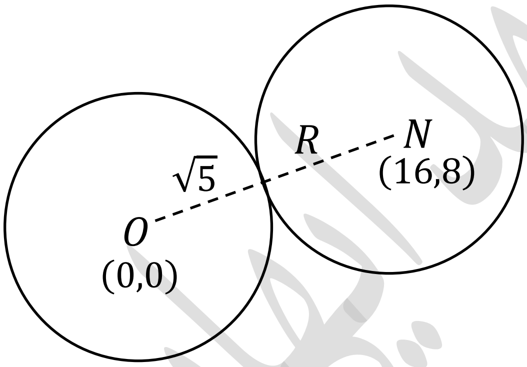
نعوض $x_N = 16$ في معادلة القطع المكافئ:

$$y^2 = 64$$

$$y = 8 \; N(8,16)$$

<u>نجد معادلتي الدائرتين:</u>

الامكانية الأولى - عندما تتماس الدائرتان من الخارج:



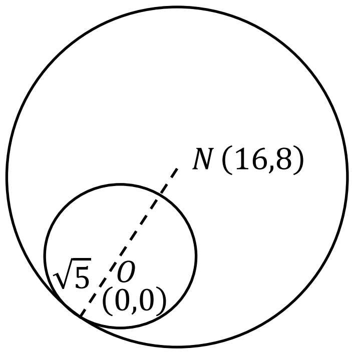
$$ON = \sqrt{5} + R$$

$$\sqrt{5} + R = \sqrt{16^2 + 8^2}$$

$$R = 7\sqrt{5}$$

$$(x-16)^2 + (x-8)^2 = 245$$

الامكانية الثانية - عندما تتماس الدائرتان من الداخل:



$$R = ON + \sqrt{5} = \sqrt{16^2 + 8^2} + \sqrt{5} = 9\sqrt{5}$$

$$R^2 = 405$$

$$(x-16)^2 + (x-8)^2 = 405$$