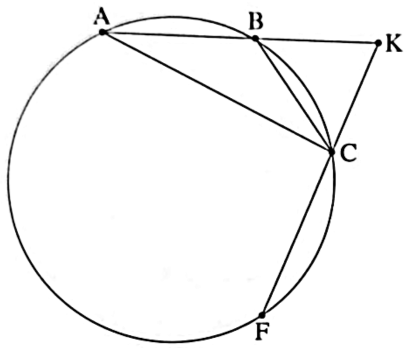
هندسة مستوية – شتاء 2026

4. في الرسم الذي أمامكم المثلّث المنفرج الزاوية ABC المحصور في دائرة.
النقطة K تقع على امتداد الضلع AB بحيث AB = BK .
امتداد القطعة KC يقطع الدائرة في نقطة إضافيّة، في النقطة F .
معطى أنّ: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA$.



أ. برهِنوا أنّ AF هو قطر في الدائرة.

الوَتَران BF وَ AC يتقاطعان في النقطة D .

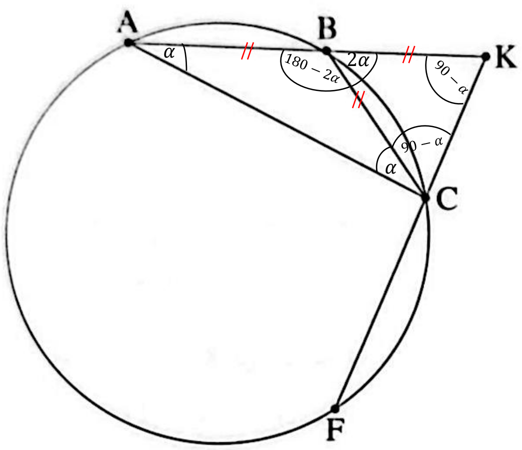
ب. برهِنوا أنّ المثلّث ADK هو متساوي الساقين.

جـ. (1) برهِنوا أنّ الشكل الرباعيّ BDCK هو قابل للحصر في دائرة.

(2) برهِنوا أنّ $\sphericalangle DKC = \sphericalangle FAC$.

د. برهِنوا أنّ $AC \cdot AD = KC \cdot AF$.

أ. نبرهن أنّ AF قطر في الدائرة



نرمز $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BCA = \alpha$

$\Leftarrow$ زوايا القاعدة متساوية

ينتج أن المثلث ABC متساوي ساقين، أي أن $AB = BC$

$$\sphericalangle ABC = 180 - \sphericalangle BCA - \sphericalangle BAC = 180 - 2\alpha$$

$$\sphericalangle KBC = 180 - \sphericalangle ABC = 2\alpha$$

معطى أنّ $AB = BK$، واستنتجنا أن $AB = BC$

ينتج أنّ: $BC = BK$، أي أنّ المثلث BKC متساوي الساقين.

نحسب زوايا القاعدة للمثلث BKC:

$$\sphericalangle BCK = \sphericalangle BKC = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$$

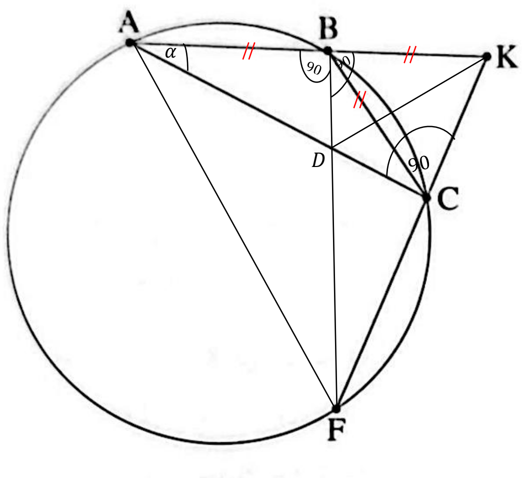
ينتج أنّ: $\sphericalangle ACK = \sphericalangle ACB + \sphericalangle KCB = 90 - \alpha + \alpha = 90$

نحسب الزاوية $\sphericalangle ACF$:

$$\sphericalangle ACF = 180 - \sphericalangle ACK = 180 - 90 = 90$$

نتج أن الزاوية $\sphericalangle ACF$ قائمة وهي تقابل AF.

AF هو قطر في الدائرة.



ب. نبرهن أن المثلث ADK متساوي الساقين

الزاوية $\sphericalangle ABF$ هي زاوية محيطية مقابلة للقطر، لذا فهي زاوية قائمة.

ينتج أنّ $BF \perp AK$

أي أنّه في المثلث ADK، الضلع BD هو ارتفاع نازل من الرأس D على القاعدة AK.

معطى أيضًا أن $AB = BK$، أي أنّ BD هو متوسط أيضًا

المثلث الذي يكون فيه الارتفاع هو متوسط يكون مثلث متساوي الساقين.

المثلث ADK هو مثلث متساوي الساقين.

ج. (1) نبرهن أن الشكل الرباعي $BDCK$ قابل للحصر في دائرة

الزاوية $\sphericalangle DBK$ هي زاوية قائمة:

$$\sphericalangle DBK = 180 - \sphericalangle ABD = 180 - 90 = 90$$

(من البند السابق نستنتج أن الزاوية $\sphericalangle ABD$ هي زاوية قائمة)

الزاوية $\sphericalangle ACK$ هي زاوية قائمة أيضا:

$$\sphericalangle ACK = 180 - \sphericalangle ACF = 180 - 90 = 90$$

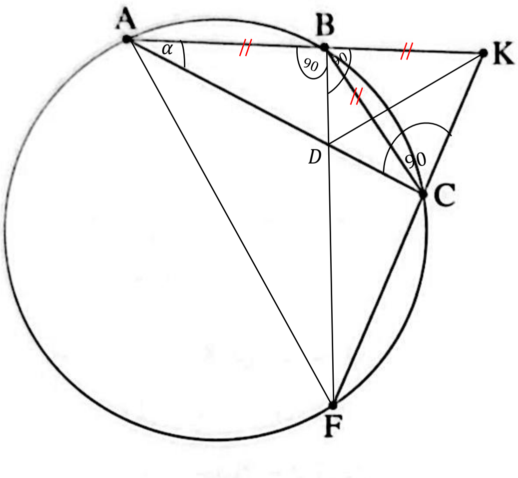
(استنتجنا سابقا أن الزاوية $\sphericalangle ACF$ هي زاوية قائمة)

ينتج أنّ مجموع الزاويتين المتقابلتين $\sphericalangle ACK$ وَ $\sphericalangle DBK$ في الشكل الرباعي $BDCK$ هو 180.

الشكل الرباعي الذي فيه مجموع زاويتين متقابلتين هو 180 هو شكل رباعي قابل للحصر في دائرة.

أي أنّ الشكل الرباعي $BDCK$ قابل للحصر في دائرة.

ج. (2) نبرهن أن $\measuredangle DKC = \measuredangle FAC$



برهنا سابقا أن BD هو ارتفاع ومتوسط على القاعدة AK

ينتج من ذلك أنّ BF، وهو امتداد لِـBD ، أن يكون أيضا ارتفاع ومتوسط على القاعدة AK

المثلث الذي يكون فيه الارتفاع هو متوسط يكون مثلثا متساوي الساقين.

ينتج من ذلك أنّ المثلث AFK هو مثلث متساوي الساقين.

أي أنّ: $\measuredangle FKA = \measuredangle FAK$

استنتجنا سابقا أنّ المثلث ADK هو مثلث متساوي الساقين، أي أنّ:

$$\measuredangle DAK = \measuredangle DKA$$

الزوايا المطلوبة مكونة من عدة زوايا:

$$\measuredangle DKC = \measuredangle FKA - \measuredangle DKA, \measuredangle FAC = \measuredangle FAK - \measuredangle DAK$$

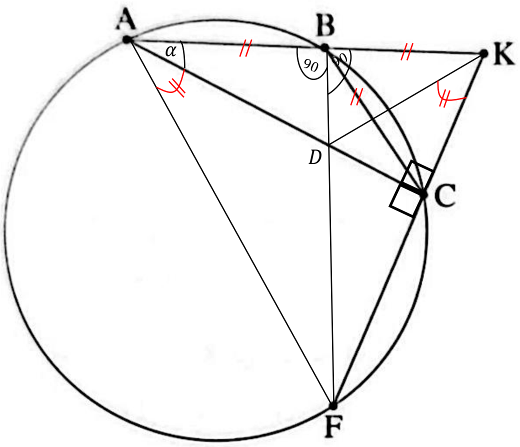
من الاستنتاجات السابقة، ينتج أنّ:

$$\measuredangle DKC = \measuredangle FAK - \measuredangle DAK$$

ينتج أنّ:

$$\measuredangle FAK - \measuredangle DAK = \measuredangle DKC = \measuredangle FAC$$

د. نبرهن أن $AC \cdot AD = KC \cdot AF$



من البند السابق ينتج أنّ $\sphericalangle DKC = \sphericalangle FAC$.

ومن البنود السابقة أنّ $\sphericalangle DCK = \sphericalangle DCF = 90$.

حسب نظرية التشابه (ز.ز)، ينتج أنّ المثلثين

FAC وَ DKC متشابهان

من التشابه ينتج أنّ:

$$\frac{AC}{KC} = \frac{AF}{KD}$$

من البنود السابقة نتج أنّ $KD = AD$، أي أنّ:

$$\frac{AC}{KC} = \frac{AF}{AD}$$

من الضرب المتبادل ينتج أنّ:

$$AC \cdot AD = KC \cdot AF$$