دالّة لوغاريثميّة – شتاء 2026

5. معطاة الدالّة $f(x) = ax \cdot (2 - \ell nx)$ ، a هو بارامتر لا يساوي 0 .

أ. **(1)** جدوا مجال تعريف الدالّة $f(x)$.

(2) جدوا إحداثيّات نقطة تقاطُع الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ مع المحور x .

معطى أنّه في النقطة التي فيها $x = e^3$ ، مَيْل المماسّ للرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ هو -8 .

ب. جدوا قيمة a .

عوِّضوا $a = 4$ في الدالّة $f(x)$ ، وأجيبوا عن البندين "جـ – د" .

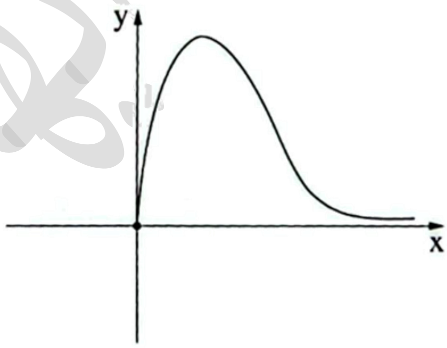
جـ. **(1)** جدوا إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة $f(x)$ ، وحدِّدوا نوع هذه النقطة .

(2) حدِّدوا أيًّا من الرسوم البيانيّة I–IV التي في آخر السؤال يصف الدالّة $f(x)$. علِّلوا تحديدكم.

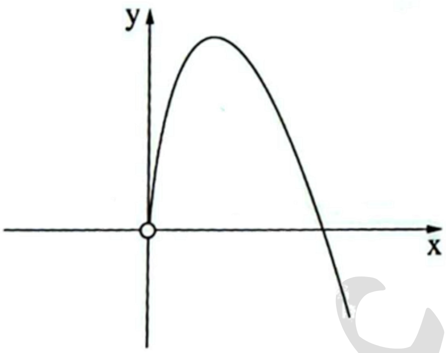
معطاة الدالّة $g(x) = -2f(x) + 37$.

د. **(1)** جدوا إحداثيّات النقطة القصوى للدالّة $g(x)$ ، وحدِّدوا نوع هذه النقطة .

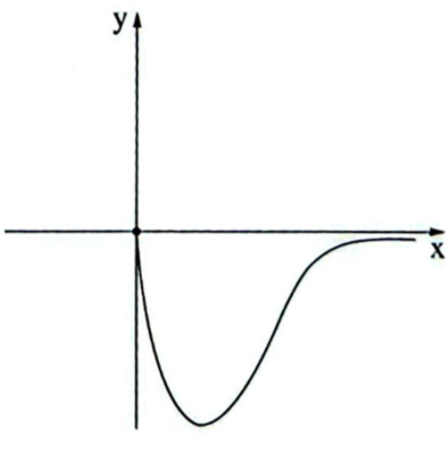
(2) هل الرسم البيانيّ للدالّة $f(x)$ يقطع الرسم البيانيّ للدالّة $g(x)$ ؟ علِّلوا إجابتكم.



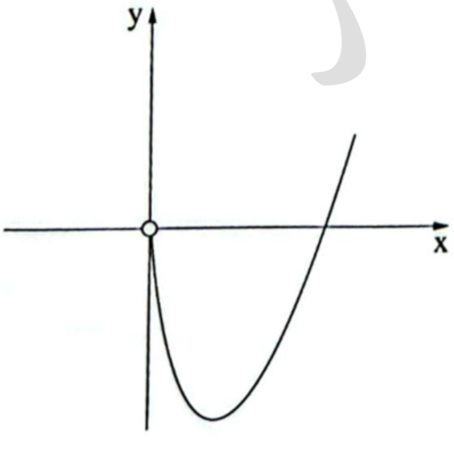
I



II



III



IV

أ. (1) نجد مجال تعريف الدّالّة $f(x)$

$$x > 0$$

أ. (2) نجد احداثيات نقاط تقاطع الرسم البيانيّ للدّالّة $f(x)$ مع المحور x

$$f(x) = ax \cdot (2 - \ln x)$$

مع محور x:

$$f(x) = 0$$
$$ax \cdot (2 - \ln x) = 0$$

$$\cancel{x = 0}$$

خارج مجال التعريف

$$2 - \ln x = 0$$
$$\ln x = 2$$
$$x = e^2$$

$$(e^2, 0)$$

ب. نجد قيمة a

معطى أن ميل المماس في النقطة $x = e^3$ هو -8، أي:

$$f'(e^3) = -8$$

نجد المشتقة:

$$f'(x) = a \cdot (2 - \ln x) + ax \cdot \frac{-1}{x}$$

$$f'(x) = a \cdot (2 - \ln x) - a$$

$$f'(e^3) = -8$$

$$a \cdot (2 - \ln e^3) - a = -8 \Longrightarrow a \cdot (2 - 3) - a = -8$$

$$-2a = -8 \Longrightarrow a = 4$$

ج. (1) نجد احداثيات النقطة القصوى للدّالّة $f(x)$ ونحدد نوعها

$$f'(x) = 4 \cdot (2 - \ln x) - 4$$

$$f'(x) = 0$$

$$4 \cdot (2 - \ln x) - 4 = 0$$

$$2 - \ln x = 1 \Longrightarrow lnx = 1$$

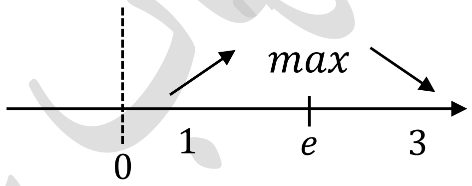
$$x = e$$

نعوض الإحداثي الذي وجدناه في الدالة كي نجد قيمة y:

$$f(x) = 4x \cdot (2 - \ln x)$$
$$f(e) = 4e \cdot (2 - \ln e) = 4e$$

$$(e, 4e)$$

نجد نوع النقطة:



$$(e, 4e)max$$

ج. (2) نحدد الرسم الذي يصف الدّالّة $f(x)$

لدينا نقطة max في $(e, 4e)$ ولدينا ثغرة في $x = 0$

الرسم II

د. (1) نجد احداثيات النقطة القصوى للدّالّة $g(x)$ ونحدد نوعها

$$g(x) = -2 \cdot f(x) + 37$$

نضرب إحداثي y للنقطة القصوى للدالة $f(x)$ بِـ -2 ونضيف للناتج 37.

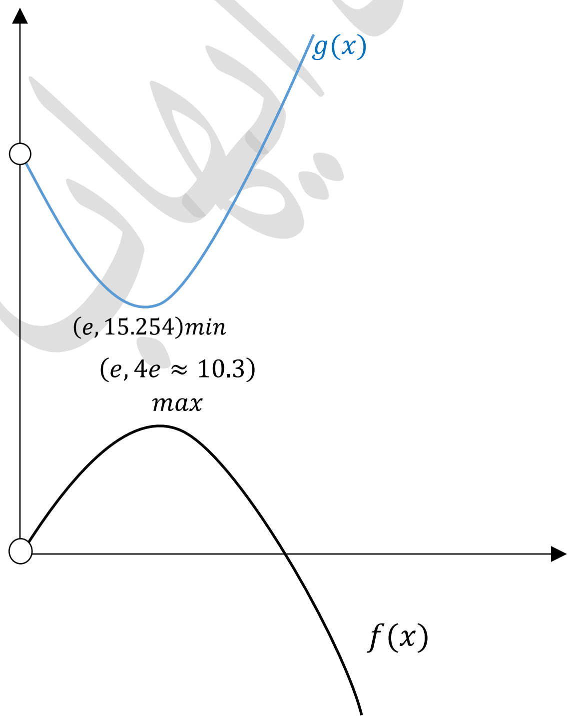
إحداثي x لا يتغير. نوع النقطة يتحول لأننا ضربنا الدالة $f(x)$ بعدد سالب.

$$y = -2 \cdot 4e + 37 = 15.254$$

النقطة القصوى للدالة $g(x)$ هي:

$$(e, 15.254)min$$

د. (2) نحدد هل يتقاطع الرسمان أم لا



نرى أن إحداثي y للدالة $g(x)$ أكبر من إحداثي y للدالة $f(x)$، ونوع النقطة القصوى للدالة $g(x)$ هو min، وبالتالي، الدالة $g(x)$ لن تقطع الدالة $f(x)$.